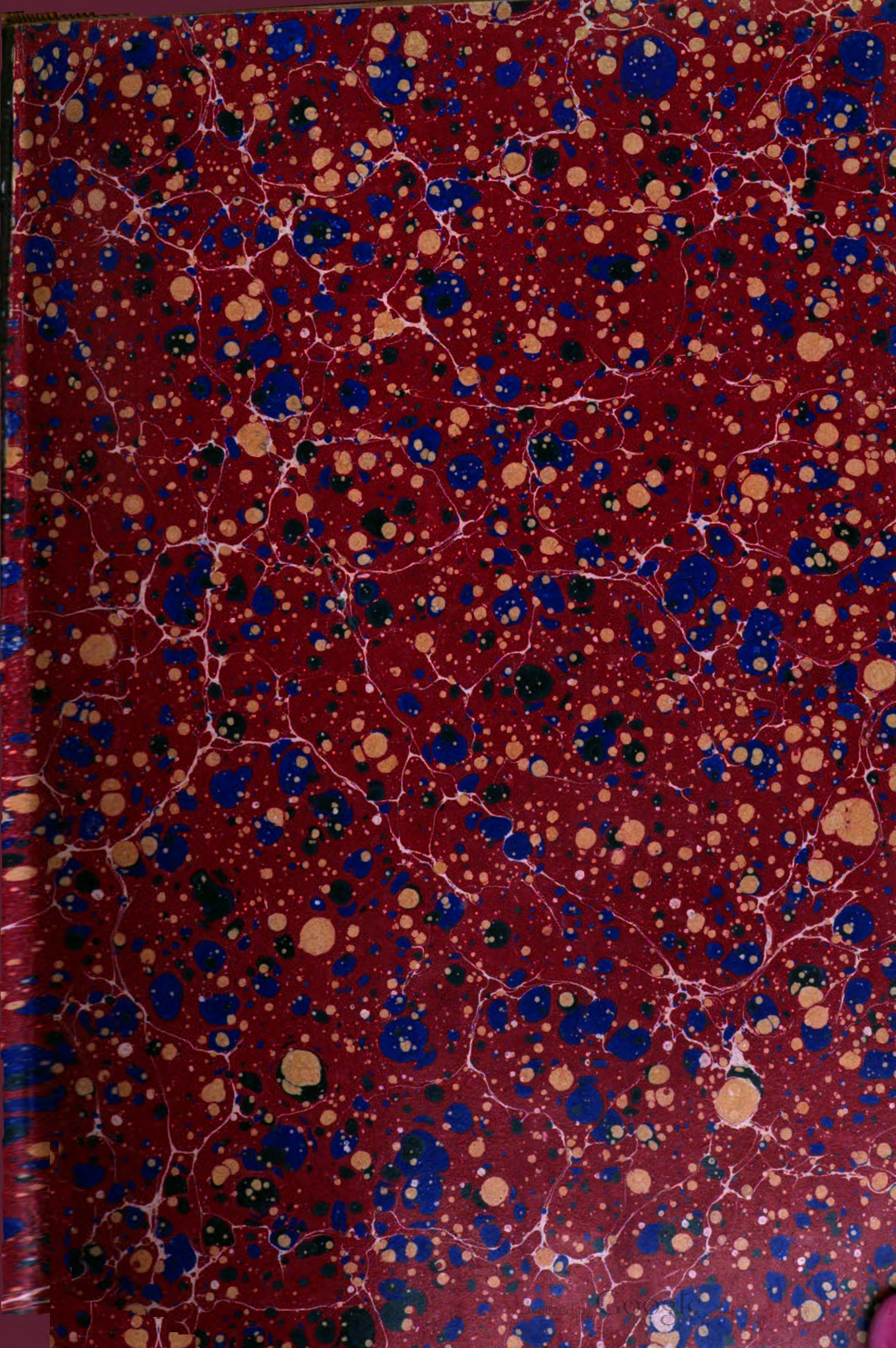



UC-NRLF
B 2 868 681



10.

Ueber das Prinzip der kleinsten Wirkung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät der Universität Marburg

eingereicht von

Karl Uckermann,

wissenschaftlichem Hilfslehrer am Königlichen Gymnasium
zu Marburg.



Marburg

Buchdruckerei Fr. Sömmering

1893.

Als Dissertation angenommen am 31. Juli 1893.

Herrn Professor Dr. Heinrich Weber

in Göttingen

als Zeichen der Dankbarkeit und Verehrung

gewidmet

vom

Verfasser.

§ 1. Einleitung.

Das Prinzip der kleinsten Wirkung kann auf zweierlei Arten zur Ableitung der Differentialgleichungen der Bewegung benutzt werden. Die ältere Art stammt von dem französischen Mathematiker *Rodrigues*, der sie in der heute wenig bekannten „Correspondance sur l'école polytechnique" (1) veröffentlichte; der Artikel blieb lange Zeit unbeachtet, die Ableitung ist daher auch nur in wenige (französische) Lehrbücher übergegangen. Allgemein verbreitet ist dagegen die zweite Ableitungsart, die von *Jacobi* (2) herrührt. Sie findet sich in den Vorlesungen über Dynamik und ist in jedem ausführlicheren Lehrbuch der Mechanik wiedergegeben.

Wir fassen das Prinzip der kleinsten Wirkung folgendermassen: Wenn sich ein System von materiellen Punkten aus einer Lage in die andere unter dem Einfluss von Kräften bewegt, die eine ebenfalls von der Zeit unabhängige Kräftefunktion U besitzen, so findet die Bewegung jedenfalls so statt, dass die Differenz zwischen der lebendigen Kraft T und der Kräftefunktion U eine Konstante h ist:

(1) $$T - U - h = 0.$$

Diese eine Differentialgleichung bestimmt aber die Bewegung nicht genau, sondern es treten noch eine An-

zahl anderer Differentialgleichungen hinzu. Diese findet man, indem man sagt: Unter allen möglichen Bewegungen, die das Punktsystem aus der einen gegebenen Lage in die andere gegebene Lage überführen, und die der Bedingung (1) genügen, ist die wirklich stattfindende Bewegung so beschaffen, dass das Integral

$$\int 2T \cdot dt,$$

das als die Wirkung bezeichnet wird, ein Minimum wird. Dabei ist zu integrieren von dem Werte t_0, der der Anfangslage, bis zu dem Werte t_1, der der Endlage entspricht; t_0 können wir konstant, etwa gleich 0, annehmen, t_1 dagegen darf für die Variationen nicht als konstant, sondern muss als variabel gedacht werden.

Das Prinzip in der angegebenen Form ist im Sinne der Varationsrechnung nur dann richtig, wenn der Wert von t_1, der der wirklich stattfindenden Bewegung entspricht, hinlänglich klein ist, kann aber aufhören richtig zu sein, wenn t_1 eine gewisse Grenze überschreitet. Diese Grenze ist folgendermassen bestimmt. Zu einer Bewegung, die den sämtlichen Differentialgleichungen und auch der Gleichung $T - U - h = 0$ genügt, denke man sich die unendlich nahe benachbarte, durch Variation der $2n-1$ Integrationskonstanten entstanden. Wenn sich zwei solche benachbarte Wege an zwei Stellen schneiden (oder einander von höherer Ordnung unendlich nahe kommen), so sind die beiden zugehörigen Werte t_0 und t_1 von t „konjugierte Punkte"*), und das Integral, das die Wirkung darstellt, darf von t_0 nicht bis t_1, geschweige darüber hinaus, erstreckt werden, ohne dass es aufhört, ein Minimum zu sein.

*) Der Ausdruck „konjugierte Punkte" rührt von *Weierstrass* her, der ihn in seinen Vorlesungen über Variationsrechnung anwendet.

Dies Resultat ist bekannt; *Jacobi* giebt es ohne Ableitung am angegebenen Ort ([2]) und im 17. Bande des Crelleschen Journals ([3]) an. Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung eliminiert er vermöge der Gleichung (1) das Zeitelement dt vollständig, so dass in der so reduzierten Aufgabe nur Grenzbedingungen auftreten. *Jacobi* sagt sogar, dass man die Zeit eliminieren müsse. Nun hat aber *Rodrigues* die erste Variation behandelt und aus ihr die Bewegungsgleichungen hergeleitet, ohne von der von *Jacobi* geforderten Reduktion, die eigentlich keine Vereinfachung ist, Gebrauch zu machen. Wir stellen uns hier die Aufgabe, die Untersuchung von *Rodrigues* zu vervollständigen, indem wir in gleicher Weise auch die zweite Variation erörtern. Das *Jacobische* Grenzkriterium, wie es von Herrn Professor *A. Mayer* ([4]) in verallgemeinerter Form aufgestellt und auf die zweite Variation der *Jacobischen* Gestalt des Prinzips angewendet worden ist, lässt sich hier, für den französischen Ansatz, nicht ohne Weiteres anwenden. Wir werden daher einen andern Weg einschlagen.

Etwas verallgemeinert lautet zunächst unsere Aufgabe:

Gegeben sind n, in dem Intervall von 0 bis zu einem positiven Wert t_1 einschliesslich der Grenzen reguläre Funktionen $q_1, \cdots q_n$ von t, die einer, t selbst nicht enthaltenden Differentialgleichung erster Ordnung

$$(3) \qquad \Phi(q_1, \cdots q_n, q'_1, \cdots q'_n) = 0$$

genügen. Es sei ferner eine zweite Funktion

$$F(q_1, \cdots q_n, q'_1, \cdots q'_n)$$

gegeben, die ebenfalls t nicht enthält. Von dieser Funktion bilden wir das Integral

(4) $$V = \int_0^{t_1} F \cdot dt.$$

Die Werte, die die $q_1, \cdots q_n$ für $t = 0$ annehmen, seien $a_1, \cdots a_n$, für $t = t_1$ $b_1, \cdots b_n$. Die Funktionen $q_1, \cdots q_n$ mögen nun stetig variiert werden, doch so, dass auch die variierten Funktionen derselben Differentialgleichung (3) genügen, dass sie für $t = 0$ dieselben Werte $a_1 \cdots a_n$ und entweder für $t = t_1$, oder auch für einen andern, in der Nähe gelegenen Wert $\bar{t}_1$ dieselben Werte $b_1 \cdots b_n$ annehmen, wie vorhin. Dadurch bekommt im allgemeinen auch das Integral (4) einen geänderten Wert $\bar{V}$. Wir fragen nun: Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit die Differenz $\bar{V} - V$ sicher positiv sei, unter der allgemeinen Voraussetzung, dass die mit $q_1, \cdots q_n$ vorgenommenen Aenderungen klein genug angenommen sind?

Die Variationen von $q_1, \cdots q_n$ nehmen wir in der Weise vor, dass wir diese Funktionen von t ersetzen durch andere denselben Grenzbedingungen und derselben Differentialgleichung genügende Funktionen: $\bar{q}_1, \cdots \bar{q}_n$, die ausser von t noch von einem variablen Parameter ε abhängen, und zwar so, dass sie sich für $\varepsilon = 0$ regulär auf $q_1, \cdots q_n$ reduzieren. — t_1, das auch variiert werden kann, ist zu ersetzen durch eine mit t_1 anfangende Potenzreihe von ε

(5) $$\bar{t}_1 = t_1 + \tau = t_1 + \varepsilon \tau_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \tau_2 + \cdots$$

Durch die angegebenen Aenderungen werden zunächst die Grössen $\bar{q}_\alpha - q_\alpha$, die wir mit δq_α bezeichnen wollen, Potenzreihen von ε:

(6) $$\delta q_\alpha = \varepsilon \xi_\alpha + \frac{\varepsilon^2}{2} \eta_\alpha + \cdots,$$

deren Koeffizienten $\xi, \eta, \cdots$ blosse Funktionen von t sind;

ausserdem geht $\overline{V}-V$ ebenfalls in eine solche Potenzreihe von ε über:

(7) $$\overline{V}-V=\varepsilon\delta V+\frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2 V+\cdots,$$

und wir nehmen, wie das üblich ist, die Minimumeigenschaft des Integrals (4) als erwiesen an, wenn in dieser Entwicklung der Koeffizient $\delta V=0$ ist für alle erlaubten Variationen, $\delta^2 V$ dagegen positiv. Kann durch ein System der Funktionen $q_1, \cdots q_n$ $\delta V=0$ und $\delta^2 V=0$ oder negativ gemacht werden, so findet kein Minimum statt.

---

§ 2. Erste Variation.

Wir untersuchen zunächst, welche Eigenschaften die Funktionen δq_α und ihre Entwicklungskoeffizienten, namentlich die Anfangskoeffizienten ξ_α haben müssen.

1) $q_\alpha+\delta q_\alpha$ soll ebenso, wie q_α für $t=0$ den Wert a_α, also δq_α den Wert 0 haben. Somit muss für $t=0$

$$\xi_\alpha=0,\quad \eta_\alpha=0, \cdots \text{ sein.}$$

2) $q_\alpha+\delta q_\alpha$ soll für $t=t_1+\tau$ denselben Wert erhalten, wie q_α für $t=t_1$. Bleiben wir stehen bei den unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung, so wird demnach $q_\alpha+\delta q_\alpha+\tau(q_\alpha'+\delta q_\alpha')+\frac{\tau^2}{2}q_\alpha''+\cdots=q_\alpha$, mithin bis auf Grössen dritter Ordnung

$$\delta q_\alpha=-\tau q_\alpha'-\frac{\tau^2}{2}q_\alpha''-\tau\delta q_\alpha'$$

sein. Hierbei bedeuten natürlich δq_α, q_α', $\delta q_\alpha'$, q_α'' die Werte dieser Funktionen für $t=t_1$. Die Vergleichung der ersten Potenz von ε auf beiden Seiten dieser Gleichung ergiebt

$$\xi_\alpha=-\tau_1 q_\alpha' \text{ für } t=t_1.$$

3) Von denjenigen Beschränkungen, denen die Funktion δq_α und ihre Koeffizienten vermöge der Bedingung unterworfen werden, dass die Gleichung $\Phi = 0$ auch für die geänderten Funktionen gelten soll, brauchen wir nur diejenige Bedingung, die sich für die ξ_α ergiebt. Diese ist:

$$(8) \qquad \sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} \xi_\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha'} \xi_\alpha' \right) = 0.$$

Den Ausdruck auf der linken Seite wollen wir mit $\delta \Phi$ bezeichnen. — Die beiden ersten Bedingungen

$$\xi_\alpha = 0 \text{ für } t = 0, \quad \xi_\alpha = -\tau_1 q_\alpha' \text{ für } t = t_1$$

sind Grenzbedingungen, die letzte dagegen eine Differentialgleichung, die für alle Werte von t gelten muss.

Wir stellen jetzt die Aenderung $\overline{V} - V$ dar, die das Integral $V = \int_0^{t_1} F \cdot dt$ durch Einsetzen der variierten Grössen $q + \delta q$ und $t_1 + \tau$ statt q und t_1 erfährt. Statt $q_1', \cdots q'_n$ wollen wir uns erlauben $q_{n+1}, \cdots q_{2n}$ zu schreiben, indem wir uns vorbehalten, zu der ursprünglichen Bezeichnungsweise so oft zurückzukehren, als es uns zweckmässig erscheint. Zur Abkürzung setzen wir ferner

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = \delta F$$

$$\sum \sum_{\alpha, \beta = 1}^{2n} \frac{\partial^2 F}{\partial q_\alpha \, \partial q_\beta} \delta q_\alpha \delta q_\beta = \delta^2 F;$$

so wird, wenn wir bei den unendlich kleinen Grössen der zweiten Ordnung stehen bleiben:

$$\overline{V} - V = \int_0^{t_1} (F + \delta F + \tfrac{1}{2} \delta^2 F) \, dt + \int_{t_1}^{t_1 + \tau} (F + \delta F) \, dt.$$

Es sei $G(t)$ eine Funktion, deren Ableitung $F + \delta F$ ist; dann ist

$$\int_{t_1}^{t_1+\tau} (F + \delta F)\, dt = G(t_1 + \tau) - G(t_1)$$
$$= \tau G'(t_1) + \frac{\tau^2}{2} G''(t_1) + \cdots$$

also bis auf Grössen dritter Ordnung genau:

$$\int_{t_1}^{t_1+\tau} (F + \delta F)\, dt = (F + \delta F)\,\tau + \tfrac{1}{2} F'(t_1)\,\tau^2.$$

Ferner ist

$$\delta F = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial F}{\partial q_\alpha'} \frac{d\,\delta q_\alpha}{dt},$$

also wenn wir $\frac{\partial F}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha'}\right) = X_\alpha$ setzen

$$\delta F = \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha\, \delta q_\alpha + \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_\alpha'} \delta q_\alpha.$$

Da nun $\delta q_\alpha = 0$ ist für $t = 0$, so erhalten wir:

$$\int_0^{t_1} \delta F \cdot dt = \int_0^{t_1} \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha\, \delta q_\alpha \cdot dt + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_\alpha'} \delta q_\alpha,$$

worin sich das Glied ausserhalb des Integralzeichens auf den Wert $t = t_1$ bezieht. Da aber dort

$$\delta q_\alpha = -\tau (q_\alpha' + \delta q_\alpha' + \tfrac{1}{2} \tau q_\alpha'')$$

gesetzt werden kann, so ist:

$$\int_0^{t_1} \delta F \cdot dt = \int_0^{t_1} \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha\, \delta q_\alpha \cdot dt - \tau \sum_{\alpha=1}^{n} (q_\alpha' + \delta q_\alpha' + \tfrac{1}{2} \tau q_\alpha'') \frac{\partial F}{\partial q_\alpha'}.$$

Somit erhalten wir, bis auf unendlich kleine Grössen dritter Ordnung genau:

$$\bar{V}-V=\int_0^{t_1}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha \, \delta q_\alpha + \tfrac{1}{2}\,\delta^2 F\right)\cdot dt + \tau \cdot R(t_1)$$

$$R(t_1)=F+\delta F+\tfrac{1}{2}\,\tau\, F' - \sum_{\alpha=1}^{n}(q_\alpha' + \delta q_\alpha' + \tfrac{1}{2}\,\tau\, q_\alpha'')\frac{\partial F}{\partial q_\alpha'}.$$

Nun ist für $t=t_1$ in

$$\delta F=\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\,\delta q_\alpha + \frac{\partial F}{\partial q_\alpha'}\,\delta q_\alpha'\right)$$

δq_α durch $-\tau q_\alpha'$ zu ersetzen; alle übrigen Terme von δq_α liefern hier nur Beiträge zu den Gliedern von höherer als der zweiten Ordnung; also setzen wir

$$\delta F=\sum_{\alpha=1}^{n}\left(-\tau\,\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\,q_\alpha' + \frac{\partial F}{\partial q_\alpha'}\,\delta q_\alpha'\right).$$

Ferner ist

$$F'=\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\,q_\alpha' + \frac{\partial F}{\partial q_\alpha'}\,q_\alpha''\right).$$

Mithin ist

$$R=\left(F-\sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha'\,\frac{\partial F}{\partial q_\alpha'}\right) - \tfrac{1}{2}\,\tau\sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha'\,\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}.$$

Also haben wir

$$(9) \qquad \overline{V} - V = \int_0^{t_1} (X_1 \delta q_1 + X_2 \delta q_2 + \cdots X_n \delta q_n + \tfrac{1}{2} \delta^2 F) \cdot dt$$

$$+ \tau P - \frac{\tau^2}{2} P_1,$$

wo

$$X_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha'}\right)$$

$$P = F - \sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha' \frac{\partial F}{\partial q_\alpha'}$$

$$P_1 = \sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha' \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}$$

zu setzen ist. Für P und P_1 sind natürlich in der aufgestellten Gleichung die Werte dieser Funktionen für $t = t_1$ zu setzen.

Es soll hier gleich eine Beziehung zwischen den Grössen $X_1, \cdots X_n$ und P angegeben werden. Bildet man $\sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha q_\alpha'$ so ergiebt sich:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha q_\alpha' = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha} q_\alpha' + \frac{\partial F}{\partial q_\alpha'} q_\alpha''\right) - \sum\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha'} q_\alpha'' + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha'}\right) q_\alpha'\right)$$

$$= \frac{dF}{dt} - \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_\alpha'} q_\alpha'$$

$$(10) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha q_\alpha' = \frac{dP}{dt}.$$

Setzen wir für δq_α und für τ ihre Entwicklungen nach Potenzen von ε, so erhalten wir:

(11) $$\delta V = \int_0^{t_1} (X_1 \xi_1 + X_2 \xi_2 + \cdots + X_n \xi_n) \cdot dt + \tau_1 P.$$

Wären die ξ nur den Grenzbedingungen unterworfen, so würden wir hieraus schliessen, dass im Falle des Minimums $q_1, \cdots q_n$ den Gleichungen

$$X_1 = 0,\ X_2 = 0, \cdots\ X_n = 0,\ P = 0$$

genügen müssen. Wollen wir in unserem Fall, wo die ξ ausser den Grenzbedingungen noch der Bedingung (8) unterliegen, einen ähnlichen Schluss ziehen, so müssen wir die Grössen ξ durch andere ersetzen, die keiner Gleichung unterworfen sind.

Die ξ_α sollen den beiden Grenzbedingungen genügen:

$$\xi_\alpha = 0 \text{ für } t = 0,\ \xi_\alpha = -\tau_1 q_\alpha' \text{ für } t = t_1.$$

Wählen wir nun irgend eine reguläre Funktion ω, die $= 0$ ist für $t = 0$, und $= -\tau_1$ für $t = t_1$, die sonst aber ganz willkürlich ist, und setzen

$$\xi_\alpha - \omega q_\alpha' = \zeta_\alpha,$$

so werden $\zeta_1 \cdots \zeta_n$ an beiden Grenzen verschwinden. Umgekehrt, wenn wir unter $\zeta_1, \ldots \zeta_n$ irgend welche für $t = 0$ und $t = t_1$ verschwindende Funktionen verstehen, und unter ω eine Funktion, die für $t = 0$ und $t = t_1$ die Werte 0 und $-\tau_1$ hat, so stellt $\xi_\alpha = \zeta_\alpha + \omega q_\alpha'$ ein System der ξ dar, das den Grenzbedingungen genügt. Damit nun auch die dritte Bedingung $\delta\Phi = 0$ erfüllt ist, muss

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha}(\zeta_\alpha + \omega q_\alpha') + \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha'}(\zeta_\alpha' + \omega q_\alpha'' + \omega' q_\alpha') = 0$$

sein. Da aber

(12) $$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} q_\alpha' + \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha'} q_\alpha''\right) = \frac{d\Phi}{dt} = 0$$

ist, so ergiebt sich:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} \zeta_\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha'} \zeta_\alpha'\right) + \omega' \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha'} q_\alpha' = 0.$$

Ist $\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha'} q_\alpha'$ von 0 verschieden, was in dem uns am meisten interessierenden Fall der Dynamik zutrifft, so ist durch diese Gleichung ω' als reguläre Funktion der ζ definiert; durch Integration ergiebt sich ω als Funktion der ζ und einer additiven Konstanten, die so bestimmt werden kann, dass in der That an der untern Grenze $\omega = 0$ wird; unter der Grösse ε_1 (die ja auch 0 sein darf) verstehen wir dann den Wert von $-\omega$ für $t = t_1$; damit stellt dann

$$\xi_\alpha = \zeta_\alpha + \omega q_\alpha'$$

ein erlaubtes System von Variationen dar, und zwar das denkbar allgemeinste.

Wir führen nun die so bestimmten Werte in die erste Variation ein. Dann erhalten wir:

$$\delta V = \int_0^{t_1} \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha (\zeta_\alpha + \omega q_\alpha') \cdot dt - \omega P$$

oder wegen (10):

$$\delta V = \int_0^{t_1} \sum_{\alpha=1}^{n} (X_\alpha \zeta_\alpha)\, dt + \int_0^{t_1} \omega \frac{dP}{dt} - \omega P$$

oder endlich:

$$\delta V = \int_0^{t_1} \sum_{\alpha=1}^{n} (X_\alpha \xi_\alpha) \cdot dt - \int_0^{t_1} \omega' P dt.$$

Nun führen wir für ω' aus (12) seinen Wert ein. Wir bezeichnen zur Abkürzung den Quotienten

$$\frac{P}{\sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha' \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha'}},$$

der eine bestimmte Funktion von $q_1, \ldots q_n, q'_1, \ldots q'_n$ ist, mit λ, so dass

$$-\omega' P = \lambda \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} \xi_\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha'} \xi_\alpha' \right) \right\}$$

wird. Setzen wir zur Abkürzung

$$\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha'} \right) = Y_\alpha,$$

so wird

$$-\omega' P = \sum_{\alpha=1}^{n} Y_\alpha \xi_\alpha + \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha'} \xi_\alpha \right),$$

und da die ξ an beiden Grenzen verschwinden, so ist das zweite Glied von δV

$$-\int_0^{t_1} \omega' P \, dt = \int_0^{t_1} \sum_{\alpha=1}^{n} Y_\alpha \xi_\alpha \, dt.$$

Wir erhalten demnach als allgemeinsten Ausdruck der ersten Variation

$$\delta V = \int_0^{t_1} (Z_1 \zeta_1 + Z_2 \zeta_2 + \cdots Z_n \zeta_n) \cdot dt,$$

worin $\zeta_1, \ldots \zeta_n$ willkürliche, an beiden Grenzen verschwindende Funktionen sind, die keiner weitern Bedingung zu genügen haben; ferner ist

$$Z_\alpha = X_\alpha + Y_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha'} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha'}\right),$$

und λ ist als Funktion von $q_1 \ldots q_n$, $q_1', \ldots q_n'$ definiert durch die Gleichung

(13) $$\lambda = \frac{F - \sum q_\alpha' \frac{\partial F}{\partial q_\alpha'}}{\sum q_\alpha' \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha'}}.$$

Da $\Phi = 0$ ist, so können wir die Ausdrücke Z_α noch einfacher schreiben. Setzen wir:

$$F + \lambda \Phi = H(q_1, \ldots q_n, q_1', \ldots q_n'),$$

so wird

$$Z_\alpha = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha'}\right),$$

und es ist hier wieder

(14) $$\sum_{\alpha=1}^{n} Z_\alpha q_\alpha' = \frac{d\Psi}{dt},$$

wenn wir unter Ψ den Ausdruck

$$\Psi = H - \sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha' \frac{\partial H}{\partial q_\alpha'}$$

verstehen. Die Identität (14) kann genau so wie Seite 13 die Identität (10) abgeleitet werden.

Soll nun V ein Minimum sein, so muss der jetzt gefundene Ausdruck für δV identisch verschwinden, d. h.

es müssen bei der vollkommnen Willkürlichkeit der ζ die n Differentialgleichungen bestehen:

$$(15) \qquad Z_1 = 0,\ Z_2 = 0, \ldots Z_n = 0.$$

Zu der Differentialgleichung erster Ordnung $\Phi = 0$ kommen demnach n Differentialgleichungen zweiter Ordnung hinzu. Aus ihnen und aus der Identität (13) folgt zwar nicht, dass $\Psi = 0$, sondern dass

$$(16) \qquad \Psi = \text{konst.}$$

Diese Konstante muss den partikulären Wert 0 erhalten. Es ist nämlich identisch:

$$\Psi = F + \lambda \Phi - \sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha' \left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha'} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha'} + \Phi \frac{\partial \lambda}{\partial q_\alpha'} \right).$$

Berücksichtigen wir nun die Definition von λ (13), so folgt

$$(17) \qquad \Psi = \Phi \left(\lambda - \sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha' \frac{\partial \lambda}{\partial q_\alpha'} \right).$$

Den Fall, dass der hier mit Φ multiplizierte Faktor identisch 0 wäre, schliessen wir, als jedenfalls ganz singulär, aus; in der Dynamik z. B., auf die wir nachher noch ausführlicher zu sprechen kommen, ist λ identisch $= -1$. Unter dieser Annahme zieht die Bedingung $\Phi = 0$ die Gleichung $\Psi = 0$ nach sich und umgekehrt. Wir können aber die Bedingungsgleichung $\Phi = 0$ geradezu in der Form schreiben:

$$\Psi = H - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha'} q_\alpha' = 0.$$

Diese Bedingung bestimmt dann in der That nur die Integrationskonstante in (16) des Systems (15) der n Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Die bisherige Ableitung war schon insofern von dem Gedankengang der *Rodriguesschen* Note abgewichen, als wir λ nicht wie dort als Funktion von t, sondern als Funktion $q_1, \ldots q_n, q_1', \ldots q_n'$ definiert haben. Der Erfolg ist freilich, für die Dynamik wenigstens, bei beiden Auffassungen der gleiche. — Wir gehen jetzt noch einen Schritt weiter, indem wir unsere Aufgabe ändern und nicht mehr das Minimum von (4) suchen, sondern das Minimum eines neuen Integrals

$$\int_0^{t_1} H \cdot dt,$$

worin H als bestimmte Funktion von $q_1, \ldots q_n, q_1', \ldots q_n'$ definiert ist. Nur der Form nach, nicht dem Inhalt nach ist dadurch das Problem geändert, da $H = F + \lambda \Phi$ wegen der Bedingung $\Phi = 0$ identisch mit F wird. Wir erhalten, wenn wir die Formel (9) auf unsere Annahme übertragen:

$$\bar{V} - V = \int_0^{t_1} (Z_1 \delta q_1 + Z_2 \delta q_2 + \cdots Z_n \delta q_n + \tfrac{1}{2} \delta^2 H) \cdot dt$$

$$+ \tau \Psi \cdot + \frac{\tau_1^2}{2} \Psi_1,$$

wo $Z_1, \ldots Z_n$ und Ψ die bereits eingeführten Funktionen bedeuten, während

$$\Psi_1 = \sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha' \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

ist. — Wir sind schon zu dem Ergebnis gelangt: Wenn δV für alle erlaubten Variationen verschwinden soll, so müssen die Gleichungen (15) bestehen, also

$$Z_1 = Z_2 = \cdots Z_n = 0$$

sein, und Ψ muss wegen (17) ebenfalls verschwinden, weil $\Phi = 0$ sein soll.

Unter diesen Voraussetzungen nimmt die vollständige Variation von V die einfachere Form an:

$$\overline{V} - V = \int_0^{t_1} \frac{1}{2}\, \delta^2 H \cdot dt + \frac{\tau_1^{\,2}}{2}\, \Psi_1,$$

wo keine unendlich kleinen Grössen erster Ordnung mehr vorkommen. Es ist daher:

$$\text{(18)} \qquad \delta^2 V = \int_0^{t_1} \Omega(\xi_1, \cdots \xi_n, \xi_1', \cdots \xi_n') \cdot dt - \tau_1^{\,2}\, \Psi_1,$$

wobei Ω die homogene, quadratische Funktion von 2n Argumenten

$$\Omega(x_1, \cdots x_{2n}) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2n} \sum \frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha\, \partial q_\beta}\, x_\alpha\, x_\beta$$

bedeutet.

---

§ 3. Zweite Variation.

Wir denken uns die Integration der Differentialgleichungen (15) vollständig durchgeführt, so werden einschliesslich der einen Konstanten aus Gleichung (16) 2n Integrationskonstanten $c_1, \cdots c_{2n}$ auftreten. Zwischen diesen besteht aber eine von t unabhängige Beziehung, die sich durch Einsetzen der gefundenen Werte

$$\text{(19)} \qquad q_\alpha = q_\alpha(t, c_1, \cdots c_{2n})$$

in die Bedingungsgleichung $\Psi = 0$ ergiebt. Wegen $\frac{d\Psi}{dt} = 0$ ist diese Gleichung von t unabhängig, giebt also thatsächlich nur eine Beziehung zwischen den 2n Integrationskonstanten.

Die Variationen der q_α wollen wir uns nun so entstanden denken, dass wir diesen Integrationskonstanten $c_1, \cdots c_{2n}$ gewisse von t unabhängige, hinreichend kleine Zuwüchse $\varepsilon\omega_1, \cdots \varepsilon\omega_{2n}$ erteilen. Dadurch geht q_α über in

$$q_\alpha + \delta q_\alpha = q_\alpha + \varepsilon \sum_{\lambda=1}^{2n} \frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\lambda} \omega_\lambda + \cdots,$$

also wird:

$$\xi_\alpha = \sum_{\lambda=1}^{2n} \frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\lambda} \omega_\lambda \tag{20}$$

Soll V ein wirkliches Minimum sein, so muss der oben für $\delta^2 V$ aufgestellte Ausdruck (18) einen positiven Wert besitzen für alle Systeme $\xi_1, \cdots \xi_n$, die an der untern Grenze verschwinden, an der obern gleich $-\varepsilon_1 q_1' \cdots - \varepsilon_1 q_n'$ werden. Ein solches System ist aber (20); denn die 2n Konstanten ω_λ können diesen Forderungen gemäss gewählt werden. Die Bedingung (8), der alle erlaubten Systeme $\xi_1, \ldots \xi_n$ ausserdem genügen müssen, wollen wir einstweilen ausser Betracht lassen. Vielmehr wollen wir jetzt so verfahren, als ob wir ein Minimum, und zwar ein absolutes Minimum ohne die Nebenbedingung (8) von $\delta^2 V$ bilden wollten. Dabei müssen wir uns freilich sagen, dass die Frage nach der Existenz eines solchen Minimums keineswegs erledigt ist; wir werden aber sehen, dass die Entscheidung hierüber für unsere Untersuchung ohne Belang ist.

Variieren wir, um diesen Gedanken auszuführen, das Integral

$$\int_0^{t_1} \Omega(\xi_1, \cdots \xi_n, \xi_1', \cdots \xi_n') \cdot dt$$

bei festen Grenzen 0 und t_1 und ohne Nebenbedingung,

so ergeben sich durch Nullsetzen der ersten Variation dieses Integrals für die ξ die Differentialgleichungen:

$$(21) \qquad \Omega_\alpha(\xi_1, \cdots \xi_{2n}) = \frac{d}{dt}\Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \cdots \xi_{2n})$$

Hierin ist unter $\Omega_\alpha(\xi_1, \cdots \xi_{2n})$ der halbe partielle Differentialquotient von $\Omega(\xi_1, \cdots \xi_n, \xi_1', \cdots \xi_n')$ nach ξ_α verstanden, unter $\Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \cdots \xi_{2n})$ der halbe partielle Differentialquotient derselben Funktion nach $\xi_\alpha' = \xi_{n+\alpha}$.

Wenn, wie wir vorausgesetzt haben, die Integration der Differentialgleichungen (15) bereits gelungen ist (19), so braucht man, wie *Jacobi* (³) zuerst gezeigt hat, die Differentialgleichungen (21) nicht mehr zu integrieren. Differenziert man nämlich die Gleichungen (15), nachdem man sie durch Einsetzen von (19) zu Identitäten gemacht hat, nach einer der Integrationskonstanten c_λ, so ergeben sich wieder Identitäten:

$$(22) \qquad \Omega_\alpha\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_\lambda}, \cdots \frac{\partial q_{2n}}{\partial c_\lambda}\right) = \frac{d}{dt}\Omega_{n+\alpha}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_\lambda}, \cdots \frac{\partial q_{2n}}{\partial c_\lambda}\right)$$

Durch Vergleich dieser Form mit (21) sieht man sofort, dass $\frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\lambda}$ Lösungen der Differentialgleichungen (21) sind. Nun sind diese aber lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, also stellen die Werte (20) mit ihren 2n Konstanten ω_λ ein vollständiges System von Lösungen dar.

Zur Vereinfachung der spätern Untersuchungen wählen wir als n von den 2n Integrationskonstanten $c_1, \ldots c_{2n}$ die festen Werte $a_1, \ldots a_n$ (siehe Seite 8 oben), die die $q_1, \ldots q_n$ der Bestimmung gemäss an der untern Grenze $t = 0$ besitzen sollen. Entwickelt man dann q_α in der Nähe von $t = 0$ nach Potenzen von t, so hat man

$$(23) \qquad q_\alpha = a_\alpha + A_\alpha t + B_\alpha t^2 + \cdots,$$

also $\frac{\partial q_\alpha}{\partial a_\alpha} = 1$ für $t = 0$, dagegen $\frac{\partial q_\alpha}{\partial a_\beta} = 0$ für $t = 0$ und ebenso $\frac{\partial q_\alpha}{\partial c} = 0$, wenn c irgend eine der n übrigen Integrationskonstanten bedeutet. Sollen demnach die Werte (20) ein erlaubtes System der ξ_α sein, die man in $\delta^2 V$ einsetzen darf, so müssen sie an der untern Grenze der Bedingung 1) in § 2 genügen, d. h. die Konstanten ω in (20) müssen so gewählt sein, dass $\omega_{n+1} = \omega_{n+2} = \cdots \omega_{2n} = 0$ ist, wenn unter ω_{n+k} die zu $\frac{\partial q_\alpha}{\partial a_k}$ gehörige Konstante verstanden wird. Damit auch die andere Grenzbedingung befriedigt ist, müssen wir aus den n Gleichungen

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial c_1}\omega_1 + \cdots \frac{\partial q_\alpha}{\partial c_n}\omega_n = - q_\alpha' . \tau_1 \; (t = t_1) \tag{24}$$

$$(\alpha = 1, 2, \cdots n)$$

die Werte der übrigen ω bestimmen. — Setzen wir nun die Werte $\xi_\alpha = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\lambda}\omega_\lambda$ in $\Omega(\xi_1, \ldots \xi_{2n})$ ein, so hat man zunächst, weil Ω eine homogene, quadratische Funktion der ξ ist,

$$\Omega(\xi_1, \ldots \xi_{2n}) = \sum_{\alpha=1}^{n} [\xi_\alpha \Omega_\alpha(\xi_1, \ldots \xi_{2n}) + \xi_{n+\alpha} \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \ldots \xi_{2n})]$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{n} [\xi_\alpha \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \ldots \xi_{2n})] +$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha [\Omega_\alpha(\xi_1, \ldots \xi_{2n}) - \frac{d}{dt}\Omega_{n+\alpha}(\xi_1 \ldots \xi_{2n}]$$

Wegen (21) folgt hieraus:

$$\Omega(\xi_1,\ldots\xi_{2n}) = \frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{n}[\xi_\alpha\,\Omega_{n+\alpha}(\xi_1,\ldots\xi_{2n})]$$

Integriert man diese Gleichung zwischen den Grenzen o und t_1, so erhält man:

$$\int_0^{t_1}\Omega(\xi_1,\ldots\xi_{2n}) = \left[\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\xi_\alpha\,\Omega_{n+\alpha}(\xi_1,\ldots\xi_{2n})\right)\right]_0^{t_1}$$

An der untern Grenze sind die $\xi_\alpha = 0$, an der obern $= -\tau_1 q_\alpha'$, sonach erhalten wir für die rechte Seite:

$$-\tau_1\sum_{\alpha,k=1}^{n}\sum\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha'\,\partial q_k}\,q_\alpha'\xi_k + \frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha'\,\partial q_k'}\,q_\alpha'\xi_k'\right)_{t=t_1} =$$

$$-\tau_1\sum_{k=1}^{n}\left[\xi_k\frac{\partial}{\partial q_k}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha'}q_\alpha'\right) + \xi_k'\frac{\partial}{\partial q_k'}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha'}q_\alpha'\right) - \xi_k'\frac{\partial H}{\partial q_k'}\right]$$

Setzt man für $\sum\frac{\partial H}{\partial q_\alpha'}q_\alpha'$ seinen Wert $H - \Psi$ ein, so geht dieser Ausdruck über in:

$$-\tau_1\sum\left(\xi_k\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) + \tau_1\sum\left(\xi_k\frac{\partial\Psi}{\partial q_k} + \xi_k'\frac{\partial\Psi}{\partial q_k'}\right) =$$

$$\tau_1^2\sum\left(q_k'\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) + \tau_1\sum\left(\xi_k\frac{\partial\Psi}{\partial q_k} + \xi_k'\frac{\partial\Psi}{\partial q_k'}\right) =$$

$$\tau_1^2\,\Psi_1 + \tau_1\sum_{\lambda=1}^{n}\omega_\lambda\frac{\partial\Psi}{\partial c_\lambda}.$$

Dies setzen wir endlich in (18) ein und erhalten

$$\delta^2 V = \tau_1 \sum_{\lambda} \omega_\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial c_\lambda}. \tag{25}$$

Durch Elimination der ω_λ aus dieser und den Gleichungen (24) ergiebt sich zur Bestimmung von $\delta^2 V$ die Gleichung

$$\left| \begin{array}{cccc} -\frac{\delta^2 V}{\tau_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial \Psi}{\partial c_n} \\ \tau_1 q_1' & \frac{\partial q_1}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial c_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tau_1 q_n' & \frac{\partial q_n}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial q_n}{\partial c_n} \end{array} \right|_{(t=t_1)} = 0 \tag{26}$$

Durch diese Gleichung ist $\delta^2 V$ als Funktion von t_1 und von den Konstanten $c_1, \ldots c_n$ ausgedrückt. Verschwindet $\delta^2 V$ also für irgend einen Wert von t_1, so hört das Minimum von V auf zu existieren, falls es überhaupt existiert hat. Wir erhalten also das negative Resultat: Wird das Integral $\int_0^{t_1} H \cdot dt$ bis zu einer Stelle $t_1 = t^1$ ausgedehnt, so ist es sicher kein Minimum; t^1 ist dabei die kleinste positive Wurzel der Gleichung:

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & \frac{\partial \Psi}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial \Psi}{\partial c_n} \\ q_1' & \frac{\partial q_1}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial c_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_n' & \frac{\partial q_n}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial q_n}{\partial c_n} \end{array} \right| = 0 \tag{27}$$

Wir haben bisher die Bedingung $\Psi = 0$ ganz aus der Betrachtung weggelassen; damit aber die ξ_α wirklich ein erlaubtes System von Variationen darstellen, genügt es nicht, dass sie die beiden Grenzbedingungen befriedigen, sondern sie müssen auch im Innern des Intervalls eben der Gleichung $\Psi = 0$, oder, was dasselbe ist,

$$\sum_\alpha \left(\frac{\partial \Psi}{\partial q_\alpha} \xi_\alpha + \frac{\partial \Psi}{\partial q_\alpha'} \xi_\alpha' \right) = \sum_\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial c_\lambda} \omega_\lambda = 0$$

Genüge leisten. Setzt man in diesen letzten Ausdruck: $\sum_\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial c_\lambda} \omega_\lambda$ für ω_λ die aus (24) berechneten Werte der ω_λ ein, so verwandelt sich endlich die Forderung $\Psi = 0$ in die andre:

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \Psi}{\partial c_1} \cdots \frac{\partial \Psi}{\partial c_n} \\ q_1' & \frac{\partial q_1}{\partial c_1} \cdots \frac{\partial q_1}{\partial c_n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ q_n' & \frac{\partial q_n}{\partial c_1} \cdots \frac{\partial q_n}{\partial c_n} \end{vmatrix}$$

soll für alle Werte von t zwischen 0 und t_1 verschwinden.

An der von uns bestimmten Grenze t^1 ist der Wert dieser Determinante $= 0$; nun ist aber $\sum_\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial c_\lambda} \omega_\lambda$ eine Konstante; ist eine Konstante an irgend einer Stelle t^1 gleich 0, so ist sie es überall. Hat also die Gleichung (27) reelle Wurzeln, so können wir sagen: Es giebt erlaubte Variationen ξ_α, die für einen gewissen Wert t^1 die zweite Variation $\delta^2 V$ zum Verschwinden bringen. Ist für Werte

$t_1 < t^1$ V ein Minimum — was allerdings noch nicht erwiesen ist — so ist für $t_1 = t^1$ V sicher kein Minimum. t^1 werden wir den zur untern Grenze „konjugierten" Zeitpunkt nennen.

---

§ 4. **Zweite Variation.** Fortsetzung.

Um zu untersuchen, ob zwischen den konjugierten Punkten $\delta^2 V > 0$ ist, führen wir statt der speziellen Werte (20) des vorigen Paragraphen für die ξ_α allgemeinere Werte ein:

$$\xi_\alpha = \sum_{\lambda=1}^{n} \omega\lambda \frac{\partial q_\alpha}{\partial c\lambda} + \omega q_\alpha'. \tag{28}$$

Darin sollen nunmehr die $\omega\lambda$, sowie ω, keine Konstanten, wie in (20), sondern Funktionen von t sein. Damit dann die Werte (28) ein erlaubtes System von Variationen darstellen, also den zu Anfang des § 2 aufgestellten Bedingungen genügen, müssen die $\omega\lambda$ und ω folgenden Beschränkungen unterworfen werden:

1) An der Stelle $t = t_1$ müssen alle $\omega\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots n)$ verschwinden, dagegen $\omega = -\tau_1$ werden;

2) an der Stelle $t = 0$ muss $\omega = 0$ sein;

3) aus der Bedingung (8), in die wir wieder Ψ statt Φ einführen:

$$\sum \left(\frac{\partial \Psi}{\partial q_\alpha} \xi_\alpha + \frac{\partial \Psi}{\partial q_\alpha'} \xi_\alpha' \right) = 0,$$

folgt

$$\sum_\alpha \left[\frac{\partial \Psi}{\partial q_\alpha} \left(\sum_\lambda \omega\lambda \frac{\partial q_\alpha}{\partial c\lambda} + \omega q_\alpha' \right) + \right. \tag{29}$$

$$\left. + \frac{\partial \Psi}{\partial q_\alpha'} \left(\sum_\lambda \omega\lambda \frac{\partial q_\alpha'}{\partial c\lambda} + \omega q_\alpha'' \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial q_\alpha'} \eta_\alpha \right] = 0,$$

worin zur Abkürzung

(30) $$\eta_a = \sum_\lambda \omega_\lambda' \frac{\partial q_a}{\partial c_\lambda} + \omega' q_a'$$

gesetzt worden ist. Bedenkt man, dass nach Gleichung (16)

$$\sum_a \left(\frac{\partial \Psi}{\partial q_a} q_a' + \frac{\partial \Psi}{\partial q_a'} q_a'' \right) = 0$$

ist, so ergiebt sich aus (29)

$$\sum_\lambda \omega_\lambda \sum_a \left(\frac{\partial \Psi}{\partial q_a} \frac{\partial q_a}{\partial c_\lambda} + \frac{\partial \Psi}{\partial q_a'} \frac{\partial q_a'}{\partial c_\lambda} \right) + \sum_a \frac{\partial \Psi}{\partial q_a'} \eta_a = 0,$$

d. h.: $$\sum_\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial c_\lambda} \omega_\lambda + \sum_a \frac{\partial \Psi}{\partial q_a'} \eta_a = 0.$$

Wir verfügen nun so, dass jede dieser Summen für sich $= 0$ ist:

(31) $$\sum_\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial c_\lambda} \omega_\lambda = 0$$

(32) $$\sum_a \frac{\partial \Psi}{\partial q_a'} \eta_a = 0.$$

Die Gleichung (31) ist für die Funktionen ω_λ linear mit den konstanten Koeffizienten $\frac{\partial \Psi}{\partial c_\lambda}$, also folgt aus (31) auch die Gleichung

(33) $$\sum_\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial c_\lambda} \omega_\lambda' = 0.$$

Wir führen nun zur Vereinfachung der Rechnung ähnlich wie auf Seite 10 noch die abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$(34)\quad \begin{cases} \xi_{n+\alpha} = \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} \frac{\partial q_{\alpha}'}{\partial c_{\lambda}} + \omega q_{\alpha}'' \\ \eta_{n+\alpha} = \sum_{\lambda} \omega_{\lambda}' \frac{\partial q_{\alpha}'}{\partial c_{\lambda}} + \omega' q_{\alpha}'' \\ q'_{n+\alpha} = q_{\alpha}'', \quad \frac{\partial q_{\alpha}'}{\partial c_{\lambda}} = \frac{\partial q_{n+\alpha}}{\partial c_{\lambda}}. \end{cases}$$

Durch Differentiation nach c_{λ} fanden wir aus den Gleichungen (15) die Identitäten:

$$(22)\quad \Omega_{\alpha}\left(\frac{\partial q_1}{d c_{\lambda}}, \ldots \frac{\partial q_{2n}}{\partial c_{\lambda}}\right) = \frac{d}{dt} \Omega_{n+\alpha}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_{\lambda}}, \ldots \frac{\partial q_{2n}}{\partial c_{\lambda}}\right);$$

und durch Differentiation derselben Gleichungen (15) nach t haben wir:

$$(35)\quad \Omega_{\alpha}(q_1', \ldots q_{2n}') = \frac{d}{dt} \Omega_{n+\alpha}(q_1', \ldots q_{2n}').$$

Nun ist:

$$(36)\quad \Omega_{n+\alpha}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_{\lambda}}, \ldots \frac{\partial q_{2n}}{\partial c_{\lambda}}\right) = \frac{\partial}{\partial c_{\lambda}}\left(\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}'}\right)$$

$$(37)\quad \Omega_{n+\alpha}(q_1', \ldots q_{2n}') = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}'}\right),$$

und dies wieder, wegen (15) $= \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}$.

Multiplizieren wir (36) mit q_{α}' und (37) mit $\frac{\partial q_{\alpha}}{\partial c_{\lambda}}$ und nehmen nach Addition der beiden so gebildeten Ausdrücke die Summe von $\alpha = 1$ bis $\alpha = n$, so folgt:

$$
(38)\begin{cases}
\sum_{\alpha}\left[q_\alpha'\,\Omega_{n+\alpha}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_\lambda}\cdots\frac{\partial q_{2n}}{\partial c_\lambda}\right)-\frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\lambda}\,\Omega_{n+\alpha}(q_1',\ldots q_{2n}')\right]= \\
=\sum_{\alpha}\left[q_\alpha'\,\frac{\partial}{\partial c_\lambda}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha'}\right)-\frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\lambda}\,\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right]= \\
=\sum_{\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial c_\lambda}\left(q_\alpha'\,\frac{\partial H}{\partial q_\alpha'}\right)-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha'}\,\frac{\partial q_\alpha'}{\partial c_\lambda}-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\,\frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\lambda}\right]= \\
=\frac{\partial}{\partial c_\lambda}\left[\sum_{\alpha}\left(q_\alpha'\,\frac{\partial H}{\partial q_\alpha'}\right)-H\right]=-\frac{\partial\Psi}{\partial c_\lambda}.
\end{cases}
$$

Ferner ist, wenn unter c_μ irgend eine andere der Integrationskonstanten c verstanden ist:

$$
\frac{d}{dt}\sum_{\alpha}\frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\mu}\,\Omega_{n+\alpha}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_\lambda},\ldots\frac{\partial q_{2n}}{\partial c_\lambda}\right)=\frac{d}{dt}\sum_{\alpha}\frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\mu}\,\frac{\partial}{\partial c_\lambda}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha'}\right)=
$$

$$
=\sum_{\alpha}\left[\frac{\partial q_\alpha'}{\partial c_\mu}\,\frac{\partial}{\partial c_\lambda}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha'}\right)+\frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\mu}\,\frac{\partial}{\partial c_\lambda}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha'}\right)\right\}\right]=
$$

$$
=\sum_{\alpha}\left[\frac{\partial q_\alpha'}{\partial c_\mu}\,\frac{\partial}{\partial c_\lambda}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha'}\right)+\frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\mu}\,\frac{\partial}{\partial c_\lambda}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)\right]=
$$

$$
=\sum_{\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial c_\lambda}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha'}\,\frac{\partial q_\alpha'}{\partial c_\mu}\right)-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha'}\,\frac{\partial^2 q_\alpha'}{\partial c_\lambda\,\partial c_\mu}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial}{\partial c_\lambda}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\,\frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\mu}\right)-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\,\frac{\partial^2 q_\alpha}{\partial c_\lambda\,\partial c_\mu}\right]=
$$

$$
=\sum_{\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial c_\lambda}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\,\frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\mu}+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha'}\,\frac{\partial q_\alpha'}{\partial c_\mu}\right)-\right.
$$

$$
\left.-\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\,\frac{\partial^2 q_\alpha}{\partial c_\lambda\,\partial c_\mu}+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha'}\,\frac{\partial^2 q_\alpha'}{\partial c_\lambda\,\partial c_\mu}\right)\right]=
$$

$$
=\frac{\partial^2 H}{\partial c_\lambda\,\partial c_\lambda}-\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\,\frac{\partial^2 q_\alpha}{\partial c_\lambda\,\partial c_\mu}+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha'}\,\frac{\partial^2 q_\alpha'}{\partial c_\lambda\,\partial c_\mu}\right).
$$

Vertauscht man in diesem letzten Ausdruck λ und μ, so wird er dadurch nicht verändert; also kann auch durch diese Vertauschung der Ausdruck keine Veränderung erleiden, von dem wir an der Spitze dieser Gleichungsreihe ausgegangen waren; man hat also:

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\mu} \Omega_{n+\alpha}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_\lambda}, \dots \frac{\partial q_{2n}}{\partial c_\lambda}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_{\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\lambda} \Omega_{n+\alpha}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_\mu}, \dots \frac{\partial q_{2n}}{\partial c_\mu}\right).$$

Integriert man diese Gleichung, so tritt eine Integrationskonstante auf, die aber 0 sein muss, weil nach (23) für $t = 0$ $\frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\mu} = \frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\lambda} = 0$ ist. Es ergiebt sich also endlich die Gleichung

$$(39) \qquad \sum_{\alpha} \left[\frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\mu} \Omega_{n+\alpha}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_\lambda} \dots \frac{\partial q_{2n}}{\partial c_\lambda}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\lambda} \Omega_{n+\alpha}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_\mu} \dots \frac{\partial q_{2n}}{\partial c_\mu}\right)\right] = 0.$$

Wir multiplizieren beide Seiten dieser Gleichung mit ω_λ und nehmen die Summe von $\lambda = 1$ bis $\lambda = n$, so haben wir:

$$\sum_{\alpha} \left[\frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\mu} \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \dots \xi_{2n}) - \omega \frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\mu} \Omega_{n+\alpha}(q_1', \dots q_{2n}') - \right.$$

$$\left. - (\xi_\alpha - \omega q_\alpha') \Omega_{n+\alpha}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_\mu} \dots \frac{\partial q_{2n}}{\partial c_\mu}\right) = 0.\right.$$

Wegen (38) ist aber der hier auftretende Faktor von ω gleich $-\frac{\partial \Psi}{\partial c_n}$, also bleibt

$$\sum_a \left[\frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\mu} \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \ldots \xi_{2n}) - \xi_\alpha \Omega_{n+\alpha}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_\mu} \cdots \frac{\partial q_{2n}}{\partial c_\mu}\right)\right] = \omega \frac{\partial \Psi}{\partial c_\mu}.$$

Beide Seiten dieser Gleichung multiplizieren wir mit ω_μ' und nehmen wieder die Summe von $\mu = 1$ bis $\mu = n$, so folgt:

$$\sum_a [(\eta_\alpha - \omega' q_\alpha') \Omega_{n+\alpha}(\xi_1 \ldots \xi_{2n}) - \xi_\alpha \Omega_{n+\alpha}(\eta_1, \ldots \eta_{2n}) +$$
$$+ \omega' \xi_\alpha \Omega_{n+\alpha}(q_1' \ldots q'_{2n})] = \omega \sum_\mu \frac{\partial \Psi}{\partial c_\mu} \omega_\mu.$$

Wegen (33) ist die rechte Seite $= 0$; es bleibt also die Gleichung:

$$\sum_a [\eta_\alpha \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \ldots \xi_{2n}) - \xi_\alpha \Omega_{n+\alpha}(\eta_1, \ldots \eta_{2n})] =$$

(40)

$$= \omega' \sum_a [q_\alpha' \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \ldots \xi_{2n}) - \xi_\alpha \Omega_{n+\alpha}(q_1' \ldots q'_{2n})].$$

Um endlich noch einen kürzeren Ausdruck für den Faktor von ω' auf der rechten Seite dieser Gleichung zu gewinnen, multiplizieren wir (38) mit ω_λ und nehmen die Summe für alle λ:

$$\sum_a [q_\alpha' \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \ldots \xi_{2n}) - \omega q_\alpha' \Omega_{n+\alpha}(q_1', \ldots q_{2n}) -$$
$$- (\xi_\alpha - \omega q_\alpha') \Omega_{n+\alpha}(q_1', \ldots q_{2n}')] = -\sum_\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial c_\lambda} \omega_\lambda.$$

Die linke Seite nimmt nach gehöriger Reduktion die Gestalt des Faktors von ω' in (40) an; die rechte Seite verschwindet wegen der von uns getroffenen Verfügung (31); es bleibt uns also von (40) die einfache Gleichung übrig:

$$(41) \quad \sum_\alpha [\eta_\alpha \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \dots \xi_{2n}) - \xi_\alpha \Omega_{n+\alpha}(\eta_1, \dots \eta_{2n})] = 0.$$

Eine andere Identität, die wir zur Umformung der zweiten Variation noch nöthig haben, ergiebt sich, wenn wir Gleichung (35) beiderseits mit ω_λ multiplizieren und wieder die Summe für alle λ nehmen:

$$\Omega_\alpha(\xi_1, \dots \xi_{2n}) - \omega \Omega_\alpha(q_1', \dots q_{2n}') = \frac{d}{dt} \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \dots \xi_{2n}) -$$
$$- \frac{d}{dt}(\omega \Omega_{n+\alpha}(q_1' \dots q_{2n}')) - \Omega_{n+\alpha}(\eta_1, \dots \eta_{2n}) +$$
$$+ \omega' \Omega_{n+\alpha}(q_1' \dots q_{2n}')$$

oder, mit nochmaliger Benutzung von (35):

$$(42) \quad \Omega_\alpha(\xi_1, \dots \xi_{2n}) = \frac{d}{dt} \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \dots \xi_{2n}) - \Omega_{n+\alpha}(\eta_1, \dots \eta_{2n}).$$

Mit Hilfe der Identitäten (41) und (42) wollen wir jetzt die zweite Variation umformen.

Die zweite Variation hat die Gestalt

$$(18) \quad \delta^2 V = \int_0^{t_1} \Omega(\xi_1, \dots \xi_n)(\xi_1', \dots \xi_n') \cdot dt - \tau_1^2 \sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} q_\alpha'.$$

Darin ist $\xi_\alpha' = \xi_{n+\alpha} + \eta_\alpha$; entwickeln wir hiernach $\Omega(\xi, \xi')$ nach Potenzen von η_α, so ist

$$(43) \quad \Omega(\xi, \xi') = \Omega(\xi_1, \dots \xi_{2n}) + 2 \sum_\alpha \eta_\alpha \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \dots \xi_{2n}) +$$
$$+ \overline{\Omega}(\eta_1, \dots \eta_n);$$

darin ist $\Omega(\eta_1, \ldots \eta_n) = \Omega(0, \ldots 0, \eta_1, \ldots \eta_n)$ eine homogene quadratische Funktion der $\eta_1, \ldots \eta_n$. Statt des ersten Gliedes auf der rechten Seite von (43) können wir schreiben:

$$\sum_\alpha \xi_\alpha \Omega_\alpha(\xi_1, \ldots \xi_{2n}) + \xi_{n+\alpha} \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \ldots \xi_{2n})$$

und hierfür nach (35)

$$\frac{d}{dt}\sum_\alpha \xi_\alpha \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \ldots \xi_{2n}) - \sum_\alpha \xi_\alpha \Omega_{n+\alpha}(\eta_1, \ldots \eta_{2n}) -$$
$$- \sum_\alpha \eta_\alpha \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \ldots \xi_{2n})$$

und dies ist wegen (41):

$$\frac{d}{dt}\sum_\alpha \xi_\alpha \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \ldots \xi_{2n}) - 2\sum_\alpha \eta_\alpha \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \ldots \xi_{2n}).$$

Setzt man dies endlich in (43), so bleibt:

$$\Omega(\xi, \xi') = \frac{d}{dt}\sum_\alpha \xi_\alpha \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \ldots \xi_{2n}) + \overline{\Omega}(\eta_1, \ldots \eta_n).$$

Die gesamte zweite Variation (43) geht hiernach über in:

(44) $$\delta^2 V = \int_0^{t_1} \frac{d}{dt}\sum_\alpha [\xi_\alpha \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \ldots \xi_{2n})] \cdot dt +$$
$$+ \int_0^{t_1} \overline{\Omega}(\eta_1, \ldots \eta_n) \cdot dt - \tau_1^2 \sum_\alpha \frac{\partial H}{\partial q} q'.$$

Setzt man in dem Integralausdruck auf der rechten Seite für die ξ ihre Werte aus (28) und (34) ein, so wird zwar zu den ω ein bestimmtes reguläres System der ξ gehören, aber es werden nicht umgekehrt unter allen Umständen zu jedem regulären System der ξ auch reguläre ω gehören; vielmehr können trotz der Endlichkeit der ξ die einzelnen oder alle ω an einer Stelle t' ∞ gross werden, wenn die Determinante der zur Bestimmung der ω dienenden Gleichungen (28) und (31) verschwindet. Diese Determinante ist aber dieselbe, deren Verschwinden den konjugierten Punkt t' charakterisiert. Ausserdem verschwindet aber diese Determinante noch im Punkte $t = 0$. Doch werden deshalb die Grössen ω_λ nicht ∞ für $t = 0$. Denn für $t = 0$ ist auch $\xi_\alpha = 0$ und $\frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\lambda} = 0$ und ebenso nach unsern Festsetzungen $\omega = 0$; also dürfen wir $\xi_\alpha = \bar{\xi}_\alpha \cdot t$, $\omega = \bar{\omega} \cdot t$ setzen, sodass (28) übergeht in:

$$\bar{\xi}_\alpha = \sum_\lambda \omega_\lambda \left(\frac{1}{t}\frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\lambda}\right) + \bar{\omega} \cdot q_\alpha'.$$

Berechnen wir hieraus die ω_λ, so heisst die Determinante, die im Nenner zu stehen kommt:

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \psi}{\partial c_1} \cdots \frac{\partial \psi}{\partial c_n} \\ q_1' & \frac{1}{t}\frac{\partial q_1}{\partial c_1} \cdots \frac{1}{t}\frac{\partial q_1}{\partial c_n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_n' & \frac{1}{t}\frac{\partial q_n}{\partial c_1} \cdots \frac{1}{t}\frac{\partial q_n}{\partial c_n} \end{vmatrix}$$

Für $t = 0$ geht aber q_α' in A_α (23) und $\frac{1}{t}\frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\lambda}$ in $\frac{\partial A_\alpha}{\partial c_\lambda}$ über; nehmen wir dann zur Vereinfachung $A_\alpha = c_\alpha$, also

die Geschwindigkeiten zur Zeit $t=0$ als Integrationskonstanten an, was ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit geschehen darf, so geht unsere Determinante über in

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \Psi}{\partial A_1} & \cdots & \frac{\partial \Psi}{\partial A_n} \\ A_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_n & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = -\sum_\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial A_\alpha} A_\alpha .$$

Für $t=0$ ist aber $-\sum_\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial A_\alpha} A_\alpha = \sum_\alpha \sum_\beta \frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha' \partial q_\beta'} q_\alpha' q_\beta' =$
$= \Omega(q_1', \ldots q_n')_{t=0} = \Omega(A_1, \ldots A_n)$; und dieser Ausdruck ist von 0 verschieden. Das Verschwinden der Determinante (27) im Nullpunkt ist also ohne Bedeutung für die Ausführung der Integration in (44). Solange also t_1 unterhalb des konjugierten Punktes bleibt, ist

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_1} \frac{d}{dt} \sum_\alpha [\xi_\alpha \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \ldots \xi_{2n})] \cdot dt = \\ (45) \qquad &= \left[\sum_\alpha \xi_\alpha \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \ldots \xi_{2n}) \right]_{t=0}^{t=t_1} \end{aligned}$$

Für $t=0$ verschwindet dieser Ausdruck, da hier sämtliche ξ_α verschwinden, für $t=t_1$ dagegen wird

$$\sum_\alpha \xi_\alpha \Omega_{n+\alpha}(\xi_1, \ldots \xi_{2n}) = \tau_1^2 \sum_\alpha q_\alpha' \Omega_{n+\alpha}(q_1' \ldots q_{2n}') =$$

$$= \tau_1^2 \sum_\alpha q_\alpha' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha'}\right) = \tau_1^2 \sum_\alpha q_\alpha' \frac{\partial H}{\partial q_\alpha},$$

wegen (15).

Wir behalten endlich, wenn wir dies einsetzen, von der zweiten Variation übrig:

$$(46) \qquad \delta^2 V = \int_0^{t_1} \overline{\Omega}(\eta_1, \dots \eta_n) \cdot dt = \int_0^{t_1} \left(\sum_\alpha \sum_\beta \frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha' \partial q_\beta'} \eta_\alpha \eta_\beta \right) dt.$$

Zwischen den n Argumenten η_α dieser homogenen, quadratischen Form besteht noch die Bedingungsgleichung (32). Mit ihrer Hilfe lässt sich eines der η_α aus (46) eliminieren; wir erhalten dann das zweite Kriterium, dass die hierbei übrig bleibende quadratische Form von $n-1$ Argumenten positiv sein muss, wenn $\delta^2 V$ positiv sein soll. —

Wir fassen noch einmal das Ergebnis dieses und des vorhergehenden Paragraphen zusammen: Solange $t_1 < t^1$, ist unser ursprüngliches Integral V dann ein Minimum, wenn $\overline{\Omega}(\eta_1, \dots \eta_n) > 0$ ist; ist $t_1 = t^1$, so lässt sich ein erlaubtes System der ξ aufstellen, für das $\delta^2 V = 0$ ist; V ist dann sicher kein Minimum; ist $t_1 > t^1$, so wird die Gleichung (45) unrichtig und es bedürfte einer weitern Untersuchung über das Vorzeichen von $\delta^2 V$; es mag erwähnt werden, dass sich der Beweis erbringen lässt, dass $\delta^2 V$ für $t_1 > t^1$ entgegengesetztes Vorzeichen besitzt, als für $t_1 < t^1$.

---

§ 5. Anwendung auf die Dynamik.

Im Falle der Dynamik haben wir

$$F = 2T, \quad \Phi = T - U - h$$

zu setzen. Nach (13) wird dann

$$\lambda = \frac{2T - 2 \sum \frac{\partial T}{\partial q'} q'}{\sum \frac{\partial (T - U - h)}{\partial q'} q'}.$$

U ist von den Geschwindigkeiten unabhängig und T eine homogene Funktion zweiten Grades der q', also ist

$$\frac{\partial U}{\partial q_\alpha'} = 0, \quad \sum \frac{\partial T}{\partial q'} q' = 2T;$$

darnach wird

$$\lambda = -1.$$

Die Funktion $H = F + \lambda \Phi$ bekommt dann den Wert $T + U + h$, und unser Integral $\int H \cdot dt$ nimmt die Gestalt an:

$$\int_0^{t_1} (T + U + h) \cdot dt, \tag{47}$$

ist also von dem Integral des *Hamiltonschen* Prinzips nicht sehr verschieden. Es unterscheidet sich von ihm einmal durch seine eigentümlichen Grenzbedingungen und die für die Bewegungsgleichungen bedeutungslose Konstante h; ausserdem aber ist das Integral (47) nicht so allgemein, wie das *Hamiltonsche*. In diesem darf U die Zeit t explizit enthalten, beim Prinzip der kleinsten Wirkung dagegen darf U die Zeit nicht enthalten; auch dürfen sich die Systemverbindungen nicht mit der Zeit ändern. Der Satz von der lebendigen Kraft, der bei den andern Prinzipien der Dynamik als Folge dieser speziellen Voraussetzungen auftreten würde, ist hier als Bedingungsgleichung von vornherein vorgeschrieben.

Wir machen die Voraussetzung, dass entweder ausser $\Psi = 0$ gar keine (endlichen) Bedingungsgleichungen vorgeschrieben sind, oder, wenn es doch der Fall sein sollte, dass die q von vornherein so gewählt sind, dass diesen Bedingungen identisch genügt wird. Dann haben wir aus (15)

$$\frac{\partial (T + U)}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'},$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

d. h. die Bewegungsgleichungen von Lagrange in der zweiten Form.

Die Bedingungsgleichung in der ersten Form $\Psi = 0$ heisst hier $T - U - h = 0$; in der zweiten Form $\Psi = 0$ hat ihre linke Seite noch den Faktor $\lambda - \sum \frac{\partial \lambda}{\partial q'} q' = -1$, sagt also ganz dasselbe aus. (Vergleiche § 2, Seite 18.)

Das Grenzkriterium für den konjugierten Punkt nimmt für die Dynamik keine besondere Gestalt an. Die Funktion $\Omega(\eta_1, \ldots \eta_n)$ dagegen ist, wenn wir die lebendige Kraft T als homogene quadratische Funktion der q' mit $T(q_1' \ldots q_n')$ bezeichnen, gleich $2T(\eta_1, \ldots \eta_n)$. Dass die lebendige Kraft als Summe von lauter positiven Quadraten dargestellt werden kann (z. B. wenn die q die rechtwinkligen Koordinaten der materiellen Punkte des Systems bedeuten), ist bekannt; durch die Bedingung (32), die hier

$$\sum_a \frac{\partial T}{\partial q_a'} \eta_a = 0$$

lautet, wird hieran nichts geändert.

Wir dürfen also allgemein sagen: Das Integral

$$\int_0^{t_1} (T + U + h)\, dt$$

ist ein Minimum, solange die obere Grenze t_1 nicht bis zum konjugierten Punkt erstreckt wird.

Zum Schluss wollen wir noch zeigen, wie sich die von uns aufgestellte Determinante (27) umformen lässt, so dass sie in das *(Mayersche)* Grenzkriterium für die *Jacobische* Form des Prinzips übergeht. Bei der *Jacobischen* Form wird t eliminiert und eine der räumlichen Koordinaten als unabhängige Variable eingeführt; wir wollen als diese q_n annehmen und sie einfach mit q bezeichnen.

Nehmen wir ferner ψ selbst als eine der Integrationskonstanten, etwa $c_n = \psi$, an, so haben wir

$$q_\alpha = f_\alpha(q_1 c_1, \ldots c_{n-1}, \psi), \; q_\alpha' = \frac{\partial f_\alpha}{\partial q} q'$$

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial c_\beta} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial c_\beta} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial c_\beta}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial c_1} = \frac{\partial \psi}{\partial c_2} = \cdots \frac{\partial \psi}{\partial c_{n-1}} = 0, \; \frac{\partial \psi}{\partial c_n} = 1.$$

Dadurch bleibt von der Determinante (27):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} q' & \frac{\partial f_1}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial c_1} + \frac{\partial f_1}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial c_{n-1}} + \frac{\partial f_1}{\partial c_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial q} q' & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial c_1} + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial c_{n-1}} + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial c_{n-1}} \\ q' & \frac{\partial q}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial q}{\partial c_{n-1}} \end{vmatrix}$$

Subtrahiert man die mit $\frac{1}{q'} \cdot \frac{\partial q}{\partial c_\alpha}$ multiplizierte erste Vertikalreihe von jeder αten Vertikalreihe, so bleibt bis auf den Faktor q′ die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial c_1} & \frac{\partial f_1}{\partial c_2} \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial c_{n-1}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial c_1} & \frac{\partial f_2}{\partial c_2} \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial c_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial c_1} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial c_n} \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial c_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Ihr Verschwinden liefert die dem konjugierten Punkt entsprechende Koordinate q.

Die Aufsätze und Werke, auf die die Zitate im Text verweisen, sind:

1. *Rodrigues:* De la manière d'employer le principe de la moindre action, pour obtenir les équations du mouvement, rapportées aux variables indépendantes. (Correspondance sur l'école polytechnique. T. III, 1814/16.) Paris 1816.

2. *Jacobi:* Vorlesungen über Dynamik, 2. Aufl. Seite 44—52.

3. *Jacobi:* Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen. (Crelles Journal, Bd. 17, Seite 68).

4. *A. Mayer:* Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale (Habilitationsschrift). Göttingen 1866.

Man vergleiche ausserdem:

A. Mayer: Ueber die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale (Crelles Journal, Bd. 69, Seite 238).

Clebsch: Ueber die Reduktion der zweiten Variation auf ihre einfachste Form.

Verschiedene Aufsätze von *A. Mayer* über Variationsrechnung und über das Prinzip der kleinsten Wirkung in den Leipziger Berichten und Math. Annalen. Den ersten Beweis für die Anwendbarkeit der Multiplikatorenmethode von *Lagrange* auf Bedingungsdifferentialgleichungen hat *A. Mayer* in den Leipz. Ber. (1885, Seite 7—14) gegeben.

Berichtigung. Lies Seite 8, Zeile 13 von oben, statt „allgemeinen" „alleinigen".

Ihre Entstehung verdankt diese Arbeit der Anregung des Herrn Professors Dr. **Heinrich Weber** in Göttingen, ihre Vollendung der bereitwilligen Förderung des Herrn Professors Dr. **Friedrich Schottky** in Marburg. Es sei mir gestattet, beiden Herren hierfür und für das persönliche Interesse, das sie mir immer entgegengebracht haben, an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Lebenslauf.

Als Sohn des Rechtsanwalts Karl Uckermann und dessen verstorbener Ehegattin Mathilde geb. Soldan wurde ich, *Karl Uckermann,* am 17. März 1867 in Wetter bei Marburg geboren; ich gehöre der reformierten Konfession an. Noch im Dezember 1867 verlegten meine Eltern ihren Wohnsitz nach Marburg. Hier besuchte ich zunächst die Bürgerschule und die Vorschule, um Ostern 1876 in das kgl. Gymnasium einzutreten. Nachdem ich im Herbst 1885 auf dieser Anstalt die Reifeprüfung abgelegt hatte, widmete ich mich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften. Die ersten beiden Semester studierte ich in Berlin, die letzten sechs in Marburg. Am 26. Juli 1889 meldete ich mich zum Staatsexamen und bestand es am 25. Juli 1890 in den Fächern Mathematik, Physik und Geographie. Darauf verliess ich Marburg wieder auf ein Jahr, um in Cassel mein Seminarjahr als Mitglied des dortigen pädagogischen Seminars und gleichzeitig als Kandidat am Friedrichsgymnasium zu absolvieren. Im Herbst 1891 kehrte ich zurück und wurde Probekandidat am hiesigen Realprogymnasium. Nach dem Probejahr war ich anfangs ohne Lehrthätigkeit, seit Februar 1893 bin ich am hiesigen kgl. Gymnasium als wissenschaftlicher Hilfslehrer beauftragt.